

基于切比雪夫多项式展开的转子动力特性区间分析

王 存

(中国航天科工集团有限公司 北京动力机械研究所
激光推进及其应用国家重点实验室, 北京 100074)

摘 要: 基于切比雪夫多项式展开,建立了转子系统临界转速和稳态响应区间分析方法,能在仅具有参数上下界的情况下获得结果分布区间。针对临界转速区间分析问题,将支承刚度、密度和弹性模量视为区间变量,建立转子系统固有频率的切比雪夫多项式表达式,最终获得临界转速区间,临界转速误差不超过 0.07%。在固有特性分析基础上,应用切比雪夫方法求解转子系统的稳态响应,并由模态叠加原理对响应区间进行修正,解决了固有特性不确定性较大时稳态响应求解精度不足的问题。与蒙特卡洛插值结果相比,响应上界误差不超过 8%。基于切比雪夫展开的非确定分析方法,不需修改原结构的振动微分方程。结果表明该方法结合商业有限元软件后,应用简单,并具有理想的精度。

关 键 词: 不确定性; 区间分析; 转子动力特性; 临界转速; 切比雪夫多项式

中图分类号: V231.96 **文献标志码:** A

Interval analysis of rotor dynamic characteristics based on Chebyshev polynomials expansion

WANG Cun

(State Key Laboratory of Laser Propulsion and Application,
Beijing Power Machinery Institute,
China Aerospace Science and Industry Corporation Limited, Beijing 100074, China)

Abstract: Interval analysis method on critical speeds and steady response was established to acquire accurate results with the bounds of parameters based on Chebyshev expansion. Critical speeds were expressed as Chebyshev polynomials expansion to calculate the interval results when support stiffness, density or elastic modulus were interval parameters. The comparison between Chebyshev method, perturbation method and combination method illustrated that the maximum error was less than 0.07%. The Chebyshev method on steady response was proposed while modal superposition was applied to correct the bounds. The defect of the original method arising from the large uncertainty of critical speeds was fixed. The comparison with Monte Carlo method illustrated that the maximum error of response upper bound was less than 8%. The differential equations of the original system do not need to be modified in Chebyshev method. The results illustrate that combined with commercial finite element software, the method has good applicability and advantages of high accuracy.

收稿日期:2019-10-29

基金项目:国家自然科学基金面上项目(51575022)

作者简介:王存(1989—),男,工程师,博士,主要研究领域为航空发动机结构强度振动。E-mail:wangcunwangcun@163.com

引用格式:王存. 基于切比雪夫多项式展开的转子动力特性区间分析[J]. 航空动力学报,2020,35(4):757-765. WANG Cun. Interval analysis of rotor dynamic characteristics based on Chebyshev polynomials expansion[J]. Journal of Aerospace Power, 2020,35(4):757-765.

Key words: uncertainty; interval analysis; rotor dynamics characteristics; critical speeds; Chebyshev polynomials

由转子振动引起的整机振动问题在航空发动机型号研制过程中日益突出^[1],因此,准确的转子动力响应预测对航空发动机设计便显得非常重要。精细的三维有限元方法能最大限度保留航空发动机转静子系统的结构特征,已广泛应用于转子动力特性预测^[2]。然而,系统中的非确定因素大幅增加了系统动力特性预测的困难,并促进了概率有限元方法的发展。

以转子系统中的连接为例,其力学特征一般是几何构型、材料属性、接触界面状态和载荷等参数的函数^[3]。目前已有的针对某些特定连接几何形式的实验数据已反映出连接力学特征的巨大差异,即相同构型的连接,其力学特征也具有较强的非确定性^[4]。支承的刚度和阻尼通常也会随环境温度和载荷的变化发生非确定性变化,连接界面的磨损和转子的堆叠及安装方式也会使系统的不平衡量成为非确定参数^[5]。一般的概率方法均需要大量实验以获得非确定参数的名义值及统计规律。因此,仅需参数上下界的区间方法成为转子动力特性非确定预测的理想选择^[6]。

2004 年 Moens 和 Vande^[7]将区间方法成功应用于非确定结构的频率响应分析。Wang 和 Qiu^[8-9]基于泰勒展开提出了参数摄动法以分析结构的固有频率,在此基础上 Chen 等^[10]应用 2 阶泰勒展开方法,Fujita 等^[11]应用更新 2 阶泰勒展开方法提升了区间解的精度。在转子动力学区间分析上,王军等^[12]亦采用摄动法获得了转子临界转速区间并对实际转子结构进行了分析,郝勇等^[13]则开展了实验验证。陈萌^[6],Ma 等^[14]则系统提出了转子系统的区间分析方法,对临界转速、转子稳态和瞬态响应特征进行求解。

但上述方法在抑制由区间运算导致的计算结果的扩张上并不理想。因此,类似于泰勒展开方法,Qi 等^[15]提出了基于切比雪夫多项式的区间分析方法(后文简称切比雪夫方法),该方法被成功应用于风机齿轮传动系统的扭振分析^[16]和悬臂转子瞬态起动过程的动力特性分析^[17]。Wei 等^[18]将其应用于参数激励系统的非确定分析,Wu 等^[19]则将切比雪夫包含函数引入到非线性系统动力响应预测以及多体动力学分析当中,扩展了切比雪夫方法的应用范围。

从以上文献结果来看,基于切比雪夫方法具

有相对于泰勒展开法更高的准确度。但基于切比雪夫多项式的转子系统固有特性分析方法尚未建立,且由切比雪夫方法得到稳态响应区间解精度仍不能令人满意。因此,本文将借鉴文献[6]思路,应用模态叠加法对切比雪夫方法进行修正。此外,文献方法均是对具有较少自由度力学模型的分析,未能实现与商用有限元软件的高效组集。为拓展切比雪夫方法的通用性,本文将其与商业有限元软件结合,并通过实例进行说明。

1 临界转速的区间分析方法

1.1 无阻尼转子系统特征值区间表示

具有 n 个自由度的转子系统的自由振动方程为

$$M\ddot{z} + (C + G)\dot{z} + Kz = 0 \tag{1}$$

其中 $M=[m_{ij}]$ 为质量矩阵, $C=[c_{ij}]$ 为阻尼矩阵, $G=[g_{ij}]$ 为陀螺矩阵,是转速 Ω 的函数, $K=[k_{ij}]$ 为刚度矩阵, z 为位移列向量。具有非确定参数的转子系统特征值分析等价于在式(1)添加约束

$$\begin{aligned} \underline{m_{ij}} \leq m_{ij} \leq \overline{m_{ij}}, \quad \underline{c_{ij}} \leq c_{ij} \leq \overline{c_{ij}}, \\ \underline{g_{ij}} \leq g_{ij} \leq \overline{g_{ij}}, \quad \underline{k_{ij}} \leq k_{ij} \leq \overline{k_{ij}} \end{aligned} \tag{2}$$

式中上、下划线分别表示参数的上、下界。质量、阻尼、陀螺效应、刚度的非确定性使得各矩阵中部分元素成为区间变量。

若忽略阻尼矩阵 C ,则式(1)可通过状态变换重写为广义复特征值问题

$$D\psi = \lambda\psi \tag{3}$$

其中 λ 为复特征值, ψ 为右特征向量。

$$D = \begin{bmatrix} -M^{-1}G & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中 I 为单位矩阵,由于矩阵 M 、 G 和 K 包含区间变量,矩阵 D 亦成为区间矩阵 D^{int} 。上标 int 为区间变量指标符,表示该矩阵为区间矩阵。

$$D \in D^{int} = [D, \overline{D}] \tag{5}$$

式(3)成为区间方程

$$D^{int}\psi^{int} = \lambda^{int}\psi^{int} \tag{6}$$

直接求解该区间方程即可得到特征值的区间解,摄动法在假设模态振型为确定性结果的前提下求解该方程,对于大型有限元模型需提取矩阵后进行处理,效率较低。本文将以切比雪夫方法求解该方程,避免上述缺陷。

1.2 切比雪夫方法

将式(2)所示区间参数表示为 x^{int}

$$x_i^{\text{int}} = [\underline{x}_i, \bar{x}_i] = [x_i^c - \beta_i x_i^c, x_i^c + \beta_i x_i^c] \quad (7)$$

上标 int 为区间变量指示符,下标 i 为非确定参数的序号。 x_i^c 表示区间参数的中值,而 β_i 代表非确定系数,被用于表征参数的非确定程度,其值越大,说明参数的非确定程度越强。区间参数使得系统的各矩阵成为区间矩阵。切比雪夫方法并不直接针对区间矩阵进行求解,而是通过在积分点上求解式(3)的一系列确定解,进而组合形成包含函数,扩展得到区间解。用该法求解特征值的具体思路如下:

非确定参数个数为 p ,则数值积分点数为 m 时,各积分点可通过式(8)、式(9)计算

$$\theta_{j_i} = \frac{2j_i - 1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

$$x_{i,j_i} = \frac{\bar{x}_i + \underline{x}_i}{2} + \frac{\bar{x}_i - \underline{x}_i}{2} \cos \theta_{j_i} \quad (9)$$

式中 $i=1,2,\dots,p, j_i=1,2,\dots,m$ 。角标 i, j_i 表示第 i 个非确定参数的第 j_i 个积分点。各非确定参数取积分点处的确定值时,特征值 λ 可通过式(10)进行计算。

$$D(\Omega, x_{1,j_1}, \dots, x_{p,j_p}) \psi = \lambda(\Omega, x_{1,j_1}, \dots, x_{p,j_p}) \psi \quad (10)$$

式中 Ω 为转速圆频率。由上述各积分点组合分别对应的特征值,得到高斯切比雪夫数值积分中各项系数。

$$f_{\Omega, l_1, \dots, l_p} \approx \left(\frac{2}{m}\right)^p \sum_{j_1=1}^m \dots \sum_{j_p=1}^m \lambda(\Omega, x_{1,j_1}, \dots, x_{p,j_p}) \prod_{k=1}^p \cos l_k \theta_{j_k} \quad (11)$$

式中下标 $l_1, \dots, l_p$ 为数值积分中,系数项编号,是大于等于0且小于等于多项式阶数 n 的整数。则特征值 λ 可近似表示为

$$\lambda(\Omega, x_1, \dots, x_p) \approx \sum_{l_1=0}^n \dots \sum_{l_p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^q f_{\Omega, l_1, \dots, l_p} \prod_{k=1}^p \cos l_k \theta_k \quad (12)$$

式中 q 表示 p 个下标 $l_1, \dots, l_p$ 中等于0的总数,而 $\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, \pi]$ 。最终得到特征值包含函数

$$\lambda(\Omega, x_1^{\text{int}}, \dots, x_p^{\text{int}}) \approx \sum_{l_1=0}^n \dots \sum_{l_p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^q f_{\Omega, l_1, \dots, l_p} \prod_{k=1}^p \cos l_k \theta_k^{\text{int}} \quad (13)$$

由式(13)即可获得特征值的上下界,参数 m 的值通常不小于 $n+1$ 。

本节的计算均是通过 Matlab 2012 调用有限元软件 Ansys 13.0 进行,计算得到不同参数组合下的特征值,再按上述流程对得到的特征值进行处理,最终获得区间结果,因此方法具有较好的通用性。

1.3 算例验证

图1所示为用于数值计算的算例。模型中包括7个节点,1个质量单元和8个弹簧单元。需要说明的是本文的全部计算,均是轴长度 $L=0.75\text{ m}$,轴直径 $R=0.06\text{ m}$,各段长度 $L_1=0.1\text{ m}$, $L_2=L_3=0.15\text{ m}$ 。盘质量 $m=20\text{ kg}$,极转动惯量 $I_p=0.144\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

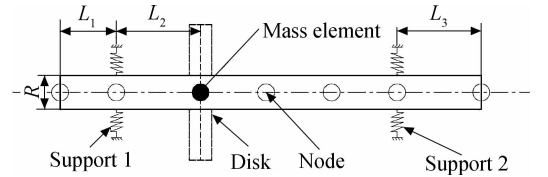


图1 转子系统模型

Fig.1 Model of rotor system

分析单一非确定参数,即支承刚度 K_2 ,密度 ρ ,弹性模量 E 分别为区间变量时的临界转速区间。支承刚度区间 $K_2^{\text{int}} = [K_2^c - \beta K_2^c, K_2^c + \beta K_2^c]$,密度区间 $\rho^{\text{int}} = [\rho^c - \beta \rho^c, \rho^c + \beta \rho^c]$,弹性模量区间 $E^{\text{int}} = [E^c - \beta E^c, E^c + \beta E^c]$,各参数名义中值设置为 $K_2^c = 4.0 \times 10^6\text{ N/m}$, $\rho^c = 7.8 \times 10^3\text{ kg/m}^3$, $E^c = 200\text{ GPa}$ 。非确定系数 β 分别取0.05和0.15。

对于实际工程结构来说,其密度不确定性很低;而支承结构由于连接中各参数的不确定性、游隙等因素,其刚度不确定性相对较高;弹性模量的区间变化在实际转子中可用以模化连接结构刚度的不确定性^[4-5]。例如,对实际结构,可进行一定的仿真分析或实验,以确定不同装配参数,不同载荷条件下连接的刚度范围,进而确定不确定系数 β 的范围。本例中弹性模量依据文献^[4-5]估取,而密度和支承刚度非确定系数直接取为与弹性模量非确定系数相同,仅用以说明方法的有效性。

图2为转子系统的前两阶模态振型。图3的坎贝尔图给出了以弹性模量 E 为区间变量时,通过切比雪夫方法计算得到的不同振型特征值随转速的变化曲线。临界转速值为曲线与等转速线的交点。以支承刚度 K_2 和密度 ρ 为区间参数时的临界转速区间求解方法相同,最终得到非确定系

数分别为 0.05 和 0.15 的结果,摄动法和切比雪夫方法的结果用相对于组合法结果的变化量百分比分别用 Δ_p 和 Δ_c 表示。列于表 1 和表 2,表中 n 为切比雪夫多项式阶数, m 为数值积分点数。需要说明的是,对于线性系统,单个参数如弹性模量、支承刚度等,对临界转速的影响通常是单调的,这意味组合法,即将各参数分别取上下界进行计算可以获得准确的固有频率区间解。因此,本文以组合法计算得到的结果作为基准,对临界转速的切比雪夫方法进行评价。文献[6]中所采用的区间摄动法也一同进行比较。

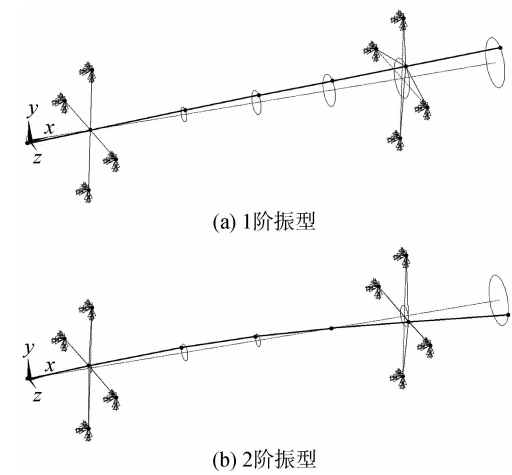


图 2 转子振型

Fig. 2 Vibration mode shapes of the rotor

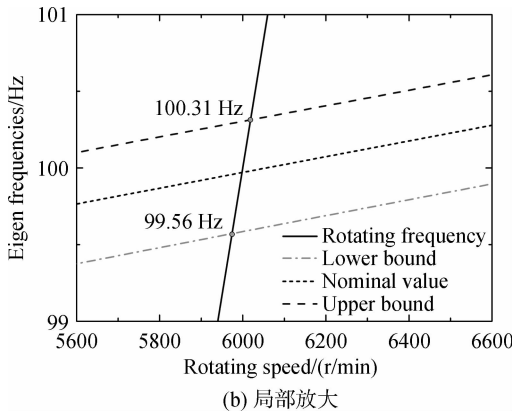
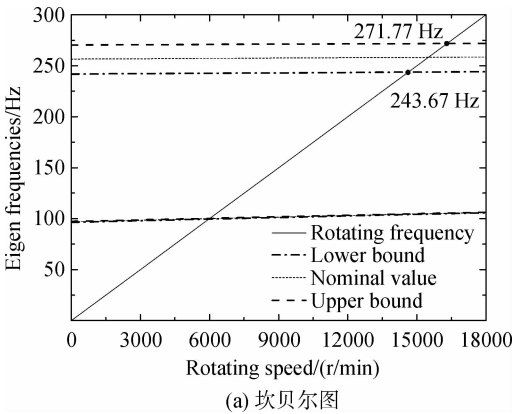


图 3 弹性模量非确定系数为 0.15 时的临界转速

Fig. 3 Critical rotating speeds when uncertain coefficients of elastic modulus is 0.15

表 1 准确度对比 ($\beta=0.05$)

Table 1 Comparison of accuracy ($\beta=0.05$)

非确定参数	组合法计算的 固有频率/Hz	$\Delta_p/\%$	$\Delta_c/\%$	
			$n=2, m=3$	$n=3, m=5$
E	1 阶上界	100.08	0	0
	1 阶下界	99.85	0	0
	2 阶上界	262.61	0.07	0.03
	2 阶下界	253.57	0.07	0
ρ	1 阶上界	101.97	-0.02	0
	1 阶下界	98.09	-0.06	-0.07
	2 阶上界	261.63	-0.03	0
	2 阶下界	254.97	-0.02	-0.04
K_2	1 阶上界	102.28	0.09	0.04
	1 阶下界	97.58	0.09	0.01
	2 阶上界	258.55	0	0
	2 阶下界	257.83	0	0

表 2 准确度对比 ($\beta=0.15$)
Table 2 Comparison of accuracy ($\beta=0.15$)

非确定参数		组合法计算的 固有频率/Hz	$\Delta_p/\%$	$\Delta_c/\%$	
				$n=2, m=3$	$n=3, m=5$
E	1 阶上界	100.26	0.05	0.05	0.05
	1 阶下界	99.56	0.07	0	0.01
	2 阶上界	270.88	0.71	0.33	0.33
	2 阶下界	243.64	0.56	0.01	0
ρ	1 阶上界	106.33	-0.15	0	0
	1 阶下界	94.59	-0.14	-0.50	-0.50
	2 阶上界	269.29	-0.28	-0.02	0
	2 阶下界	249.08	-0.20	-0.39	-0.41
K_2	1 阶上界	106.70	0.95	0.31	0.31
	1 阶下界	92.59	0.69	0	0.01
	2 阶上界	259.29	0	0	0
	2 阶下界	257.14	-0.02	-0.01	-0.02

可以看出,弹性模量对该系统的 1 阶临界转速影响较小,对其 2 阶临界转速则有较大影响;支承刚度对系统临界转速的影响趋势则与之相反,而密度则对两阶临界转速值均有较大影响。当非确定性增强时,摄动法和切比雪夫方法与组合法的偏差均增大;而除了以密度 ρ 为非确定量时临界转速下界偏差较大外,切比雪夫方法在其他所有情况下均具有比摄动法更高的精度,且其阶数和积分点数对结果几乎没有影响。因此,应用切比雪夫方法进行临界转速分析时,选取较低的阶数和积分点数可以满足求解的精度要求。这一结论对于提高计算效率很有意义,对于 p 个非确定参数, m 个积分点的情况,需调用有限元程序 p^m 次,调用次数与积分点数成幂指数关系。因此,当不确定参数数量增多后,选用较少积分点将有效节约计算时间。摄动法理上仅需求解两次特征值,但由提取的整体矩阵生成摄动矩阵的过程无法直接在有限元软件中进行,计算前准备工作较多。这是切比雪夫方法在非确定参数较少时,能够获得较高计算效率的原因。

2 稳态响应的区间分析方法

本节基于与文中第 1 节相同的逻辑建立转子稳态响应的区间分析方法。

2.1 切比雪夫方法

转子系统强迫振动的微分方程为

$$M\ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{p}(t) \tag{14}$$
其中各矩阵定义与前述一致, $\mathbf{p}(t)$ 为载荷列向量。不平衡将产生同步激振力,其圆频率为 $\Omega = 2\pi f$ 。结构中所有节点将按相同频率振动,但阻尼的作用使得各节点的相位不同,因此,响应向量和激励力向量应重写为

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{Z} e^{i\Omega t} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{P} e^{i\Omega t} \end{aligned} \tag{15}$$

其中正体 i 为虚数符号。

将式(15)代入式(14)可得响应 $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega(\mathbf{C} + \mathbf{G})]^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{H}(\Omega)^{-1} \mathbf{P} \tag{16}$$

响应的切比雪夫包含函数构造方式与文中第 1 节类似,各转速频率下的区间解亦由参数取积分点数值计算获得的确定解组成。各区间参数的定义,以及积分点定义与式(7)、式(8)和式(9)相同,各积分点响应为

$$\mathbf{Z}(\Omega, x_{1,j_1}, \cdots, x_{p,j_p}) = \mathbf{H}(\Omega, x_{1,j_1}, \cdots, x_{p,j_p})^{-1} \mathbf{P} \tag{17}$$

切比雪夫系数为

$$f_{\Omega, l_1, \cdots, l_p} \approx \left(\frac{2}{m}\right)^p \sum_{j_1=1}^m \cdots \sum_{j_p=1}^m \mathbf{Z}(\Omega, x_{1,j_1}, \cdots, x_{p,j_p}) \prod_{k=1}^p \cos l_k \theta_{j_k} \tag{18}$$

响应 $\mathbf{Z}$ 可由下式估算:

$$\mathbf{Z}(\Omega, x_1, \dots, x_p) \approx$$

$$\sum_{l_1=0}^n \dots \sum_{l_p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^q f_{\Omega, l_1, \dots, l_p} \prod_{k=1}^p \cos l_k \theta_k \quad (19)$$

响应的包含函数表示为

$$\mathbf{Z}(\Omega, x_1^{\text{int}}, \dots, x_p^{\text{int}}) \approx$$

$$\sum_{l_1=0}^n \dots \sum_{l_p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^q f_{\Omega, l_1, \dots, l_p} \prod_{k=1}^p \cos l_k \theta_k^{\text{int}} \quad (20)$$

其第 1 项为常数

$$\mathbf{Z}_0 \approx \left(\frac{1}{2}\right)^p f_{\Omega, 0, 0, \dots, 0} \approx$$

$$\left(\frac{1}{m}\right)^p \sum_{l_1=1}^m \dots \sum_{l_p=1}^m \mathbf{Z}(\Omega, x_{1, j_1}, \dots, x_{p, j_p}) \quad (21)$$

本节的计算,亦通过 Matlab 调用商业有限元软件 Ansys 进行。计算得到不同参数组合下,各频率下系统响应的确定值,再由 Matlab 进行后处理得到区间结果。

2.2 算例验证

仍以图 1 所示的转子系统为例进行分析。金属的损耗因子一般为 $0.001 \sim 0.01^{[20]}$,因此在分析中设置系统的常结构阻尼系数 γ 为 0.01,阻尼矩阵 $\mathbf{C} = 2\gamma\mathbf{K}/\Omega$,非确定系数 β 设置为 0.05。根据表 1 中的临界转速区间分析结果,将稳态响应频率的计算范围设定为 $95 \sim 105$ Hz 和 $247 \sim 267$ Hz,步长设置为 0.2 Hz。图 4 为盘心位置 1 阶和 2 阶临界转速的响应结果,作为对比,蒙特卡洛算法的计算结果一并在图中给出。

从图 4 中可以看出,如果参数对临界转速的影响很小,则响应区间的估计较为准确(图 4(a));一旦参数对临界转速的影响较大,响应的上下界与真实区间将具有较大差异(图 4(b))。类似的,当密度和支承刚度为区间参数时,上界的估计偏差很大,因此,此处没有给出其对应结果。

根据式(9),当 $m=3$,即积分点数量为 3 时,弹性模量 E 在各积分点的数值分别为 205、200

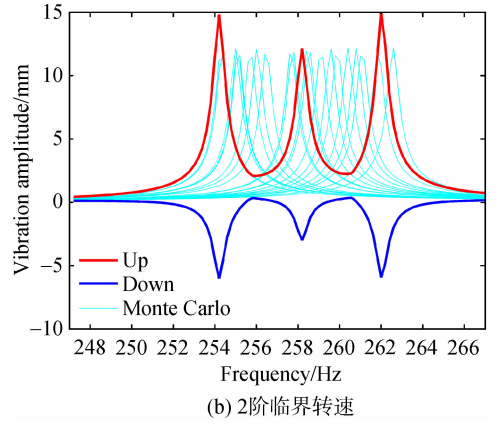


图 4 不同转速下盘处振幅(弹性模量, $\beta=0.05$)
Fig. 4 Vibration amplitude of the disk at different rotating speeds (E with $\beta=0.05$)

GPa 和 195 GPa,相应的响应计算结果如图 5 所示。

根据式(20),不同转速下的区间结果实际上是 E 取不同确定值时响应结果的线性组合。以图 4 中 256 Hz 处的响应为例,该点的响应上界由图 5 中同样频率处 3 条曲线的取值线性组合而成,由于 3 条曲线在 256 Hz 处的响应幅值均较小,因此其线性组合也很小,远离真实上界。增加积分点个数,理论上可以增加用于线性组合的曲线数量,从而提高结果准确度。因此,将积分点数 m 和多项式阶数 n 分别设置为 10 和 8 进行计算,得到的结果如图 6 所示。可见,增加阶数和积分点个数对 1 阶临界转速附近响应的影响较小,同时,能一定程度上提高 2 阶临界转速范围内的响应上界准确度精度;但计算值与真实值间仍存在较大差异,需要对算法进行相应修正。

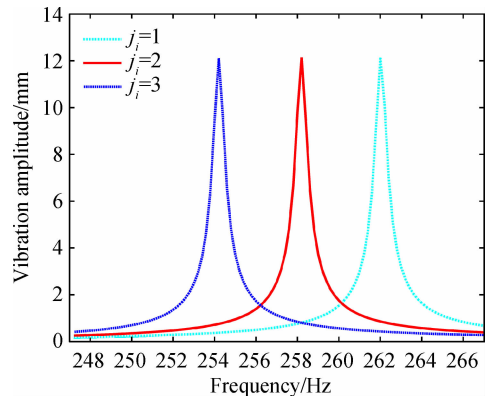
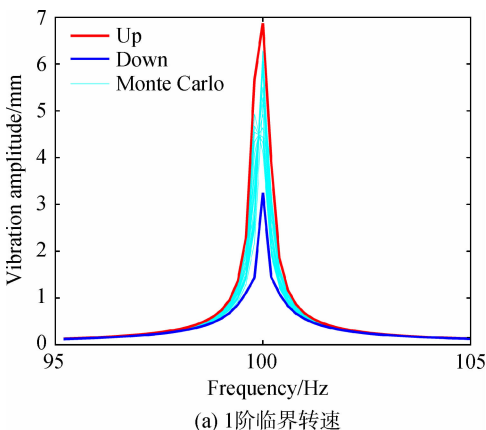


图 5 不同转速下盘处振幅
(弹性模量, $\beta=0.05, m=3$)

Fig. 5 Vibration amplitude of the disk at different rotating speeds (E with $\beta=0.05, m=3$)



(a) 1阶临界转速

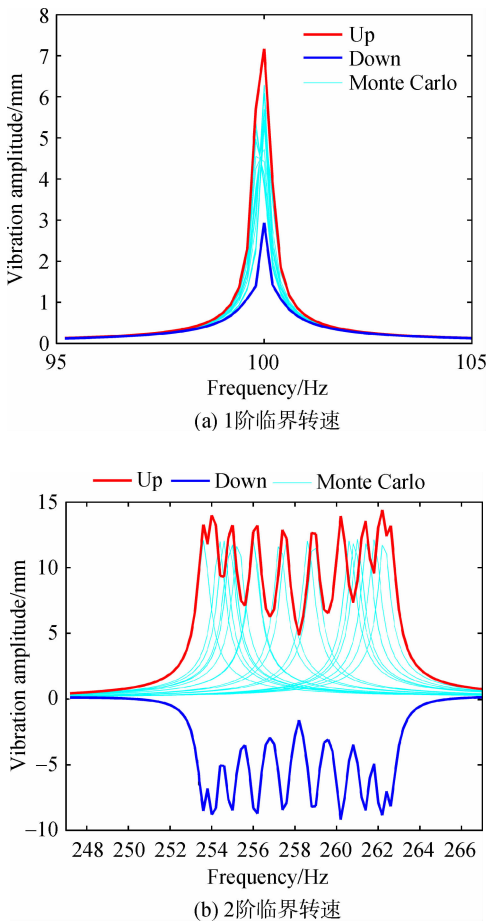


图 6 不同转速下盘处振幅
(弹性模量, $\beta=0.05, m=10, n=8$)

Fig. 6 Vibration amplitude of the disk at different rotating speeds (E with $\beta=0.05, m=10, n=8$)

2.3 区间修正方法

振动幅值直接影响旋转机械的安全运转,因此需特别关注响应的区间,尤其是响应上界。本节将给出基于模态叠加的响应上界修正方法,以克服切比雪夫算法的缺陷。

阻尼转子系统考虑前 k 阶模态时的稳态响应可表示为

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^k \frac{-\lambda_i \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i'^T}{b_i i\Omega - a_i + r_i} \mathbf{P} e^{i\Omega t} \quad (22)$$

其中 $\lambda_i = a_i/b_i$, a_i 为纯虚数, b_i 为实数。一旦 $\lambda_i = i\Omega$, 系统将按第 i 阶模态振动。在其他模态频率均远离第 i 阶模态频率时, $\lambda_i = i\Omega$ 时的响应可简化为

$$\mathbf{z}(t) \approx \frac{-i\Omega \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i'^T}{r_i} \mathbf{P} e^{i\Omega t} \quad (23)$$

假设区间参数对系统模态振型的影响可以忽略,即特征向量 $\boldsymbol{\phi}_i$ 与参数取名义值时的特征向量一致。若 $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ 和 $\mathbf{G}$ 为区间矩阵,则 a_i, b_i 和 λ_i 为

区间数,其中 λ_i 的上下界已经在文中第 2.2 节中获得。当 $i\Omega \in \lambda_i^{\text{int}}$ 时,响应上界可通过式(23)求得,其中 r_i 为模态阻尼。可见,在上述假设下,峰值响应与临界转速成正比。该上界亦可通过有限元软件求得,参数取区间中值,在有限元软件中采用模态叠加法(仅选取第 i 阶模态)进行谐响应分析,获得响应峰值,而后依据临界转速区间进行缩放。

响应下界也可通过临界转速区间解进行修正。对于具有单一非确定系数的系统,若参数取某一积分点数值计算得到的临界转速值最接近临界转速区间边界,则用该积分点数值计算响应以形成区间下界。对于具有多非确定参数的系统,各参数组合中给出最接近临界转速区间界限的参数组合将用以计算响应下界。而临界转速区间外的响应仍可由修正前的算法获得。

图 7~图 8 分别为弹性模量和支承刚度为非确定参数,修正后的响应区间,与图 4 相比,上下界均更为精确,图 8(a)中其上界误差不超过 8%。

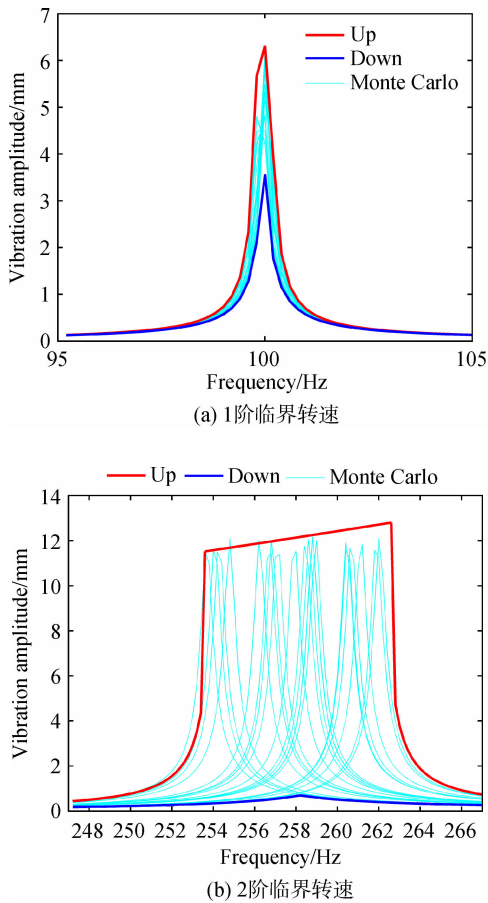


图 7 修正后不同转速下盘处振幅
(弹性模量, $\beta=0.05$)

Fig. 7 Vibration amplitude of the disk at different rotating speeds after correction (E with $\beta=0.05$)

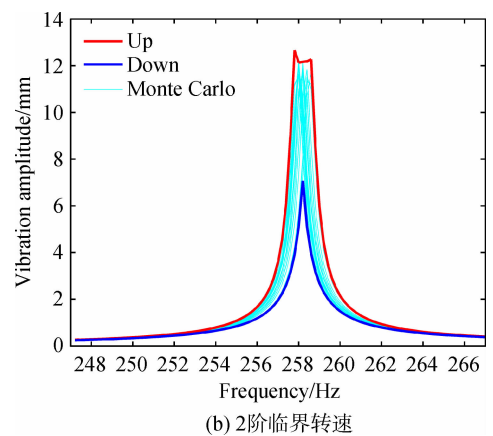
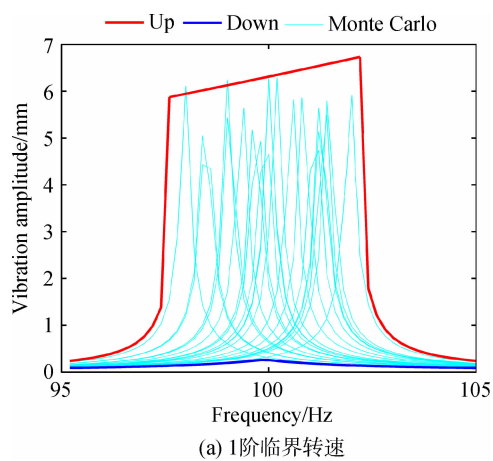


图 8 修正后不同转速下盘处振幅
(支撑刚度, $\beta=0.05$)

Fig. 8 Vibration amplitude of the disk at different rotating speeds after correction (K_2 with $\beta=0.05$)

由于假设振型不随非确定参数变化,且在临界转速区间范围内仅计及最主要的模态,所以在部分频率点上由修正算法得到的区间上界低于蒙特卡洛算法的结果。因此,本文给出的修正方法仅能用于不同阶临界转速数值相距较远的情况,对于一般的航空发动机转子系统来说,这是适用的。

3 实体单元转子系统中的应用

为进一步说明方法的通用性,采用实体单元 Solid 185 建立转子模型,结构与材料参数和图 1 相同。轮盘不再采用质量单元模拟,其尺寸根据轴段材料参数和轮盘质量参数进行折算,有限元模型如图 9 所示。前后支承弹簧单元刚度取值与文中第 2.3 节相同。模型共包括 15128 个单元和 15983 个节点。仅分析支承刚度区间变化的影响, $K_2^{int}=[K_2^s-\beta K_2^s, K_2^s+\beta K_2^s]$, 名义中值 K_2^s 仍取为 4.0×10^6 N/m。非确定系数 β 取 0.05。仍通过 Matlab 调用 Ansys 进行计算,整个过程不涉

及有限元模型的矩阵提取和处理。图 10 对比了本方法与蒙特卡洛插值算法结果,结果表明本文方法在实体有限元模型中的计算结果同样可靠。

需要说明的是,采用实体单元后,由于自由度数量的增加,对每个积分点进行计算将导致计算总时间大幅增加。可以从减缩有限元模型的角度出发,采用部件模态综合法减缩系统中具有确定参数的结构,缩小矩阵规模以提高计算效率。

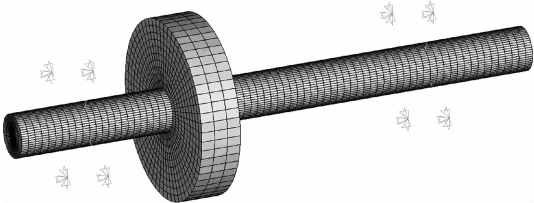


图 9 实体单元有限元模型
Fig. 9 Finite element model of solid element

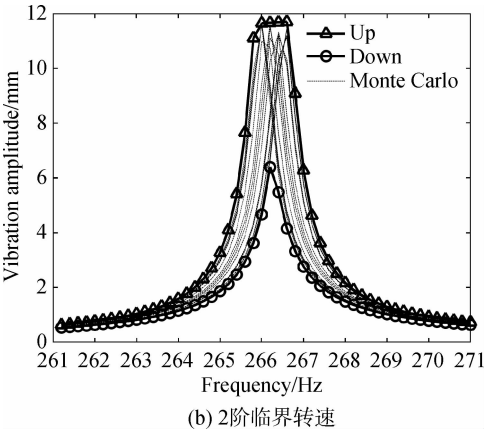
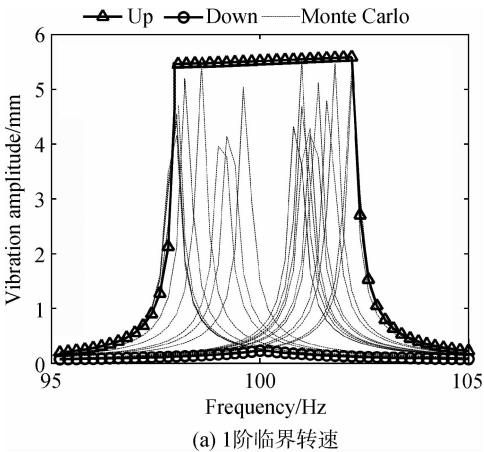


图 10 由实体单元有限元模型计算得到的振幅区间
Fig. 10 Bounds of vibration amplitude calculated by solid finite element model

4 结 论

本文基于切比雪夫多项式建立了转子动力特性的区间分析方法,包括临界转速即固有特性以

及稳态响应特性的区间分析方法。两者的分析统一在一个框架内进行,研究结论如下:

1) 与摄动法相比,切比雪夫方法在临界转速区间上界的求解上具有较高精度,临界转速误差不超过 0.07%。

2) 当非确定参数对临界转速特性区间有较大影响时,高阶及多积分点的切比雪夫方法难以得到较好的稳态响应区间解。算例表明,基于模态叠加原理的修正方法能够获得相对准确的区间上界。其计算结果与蒙特卡洛数值模拟结果吻合,响应上界误差不超过 8%。

综上,基于切比雪夫多项式的转子系统动力特性区间分析方法可用于参数具有较强非确定性的情况,能够直接利用商业有限元软件计算结果进行处理,丰富了转子系统动力特性非确定预测的手段。但实际转子系统的区间参数往往是非线性参数,如支承可能具有硬弹簧特性,对此,应当进一步开展对非线性转子系统区间分析方法的研究。

参考文献:

[1] 陈予恕,张华彪.航空发动机整机动力学研究进展与展望[J].航空学报,2011,32(8):1371-1391.
CHEN Yushu,ZHANG Huabiao. Review and prospect on the research of dynamics of complete aero-engine systems[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,2011,32(8):1371-1391. (in Chinese)

[2] 张大义,刘焯辉,洪杰,等.航空发动机整机动力学模型建立与振动特性分析[J].推进技术,2015,36(5):768-773.
ZHANG Dayi,LIU Yehui,HONG Jie,et al. Investigation on dynamical modeling and vibration characteristics for aero engine[J]. Journal of Propulsion Technology,2015,36(5):768-773. (in Chinese)

[3] LIU Shuguo,MA Yanhong,ZHANG Dayi,et al. Studies on dynamic characteristics of the joint in the aero-engine rotor system[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2012,29:120-136.

[4] NICOLI M A,JAMES P L,MICHAEL D J,et al. Handbook on dynamics of jointed structures[R]. Sandia National Laboratories,SAND2009-4164,2009.

[5] 刘永泉,王德友,洪杰,等.航空发动机整机振动控制技术分析[J].航空发动机,2013,39(5):1-7.
LIU Yongquan,WANG Deyou,HONG Jie,et al. Analysis of whole aeroengine vibration control technology[J]. Aero-engine,2013,39(5):1-7. (in Chinese)

[6] 陈萌.航空发动机转子系统动力特性区间分析理论与方法研究[D].北京:北京航空航天大学,2012.
CHEN Meng. Investigation on interval analysis theory and method of aero-engine rotordynamics[D]. Beijing:Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2012. (in Chinese)

[7] MOENS D,VANDE P. An interval finite element ap-

proach for the calculation of envelope frequency response functions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,2004,61(14):2480-2507.

[8] WANG Xiaojun,QIU Zhiping. Interval finite element analysis of wing flutter[J]. Chinese Journal of Aeronautics,2008,21(2):134-140.

[9] QIU Zhiping,WANG Xiaojun. Parameter perturbation method for dynamic responses of structures with uncertain-but-bounded parameters based on interval analysis[J]. International Journal of Solids and Structures,2005,42(18/19):4958-4970.

[10] CHEN Suhuan,MA Liang,MENG Guangwei,et al. An efficient method for evaluating the natural frequencies of structures with uncertain but bounded parameters[J]. Computers and Structures,2009,87(9):582-590.

[11] FUJITA K,TAKEWAKI I. An efficient methodology for robustness evaluation by advanced interval analysis using updated second-order Taylor series expansion[J]. Engineering Structures,2011,33(12):3299-3310.

[12] 王军,洪杰,陈萌,等.航空发动机转子系统动力特性的非概率分析[J].航空动力学报,2012,27(1):75-81.
WANG Jun,HONG Jie,CHEN Meng,et al. Non-probabilistic analysis on aero-engine rotordynamics[J]. Journal of Aerospace Power,2012,27(1):75-81. (in Chinese)

[13] 郝勇,陈萌,洪杰,等.基于泰勒展开法的转子系统动力特性区间分析方法[J].航空动力学报,2014,29(3):571-577.
HAO Yong,CHEN Meng,HONG Jie,et al. Interval analysis method of rotordynamics based on Taylor expansion method[J]. Journal of Aerospace Power,2014,29(3):571-577. (in Chinese)

[14] MA Yanhong,LIANG Zhichao,CHEN Meng,et al. Interval analysis of rotor dynamic response with uncertain parameters[J]. Journal of Sound and Vibration,2013,332(16):3869-3880.

[15] QI Wucha,QIU Zhiping. A collocation interval analysis method for interval structural parameters and stochastic excitation[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy,2012,55(1):66-77.

[16] WEI Sha,ZHAO Jingshan,HAN Qinkai,et al. Dynamic response analysis on torsional vibrations of wind turbine geared transmission system with uncertainty[J]. Renewable Energy,2015,78:60-67.

[17] FU Chao,REN Xingmin,YANG Yongfeng,et al. An interval precise integration method for transient unbalance response analysis of rotor system with uncertainty[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2018,107:137-148.

[18] WEI Sha,HAN Qinkai,PENG Zhihe,et al. Dynamic analysis of parametrically excited system under uncertainties and multi-frequency excitations[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2016,72/73:762-784.

[19] WU Jinglai,ZHANG Yunqing,CHEN Liping,et al. A Chebyshev interval method for nonlinear dynamic systems under uncertainty[J]. Applied Mathematical Modelling,2013,37(6):4578-4591.

[20] 倪振华.振动力学[M].西安:西安交通大学出版社,1989.